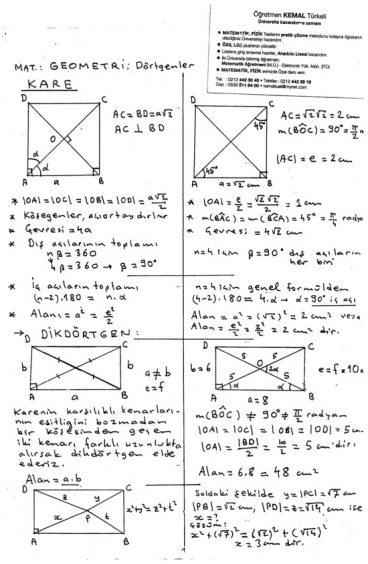


DÖTGENLERİN ÖNEMLİ ÖZELLİKLERİ

ve bu özellikleri anlaşılır kılmak

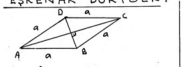
veya kavratmak için çözümlü sorular [tıklayınız]

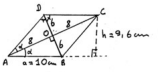
yazan: Matematik Öğretmeni Kemal Türkeli kemal_turkeli@yahoo.com



MAT: Geometri : Dörtgenler

EŞKENAR DÖRTGEN:





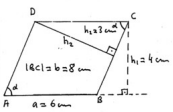
m(BÂD) ≠ 90° olan karedir.
AC, BD köşegenleri aşağıdadır.

* Alanı = a.h
  Alanı = $\frac{e.f}{2}$
* Çevresi = 4a

Alanı = 10.9,6 = 96 cm²
Alanı = $\frac{16.12}{2}$ = 96 cm²
Çevresi = 4.10 = 40 cm

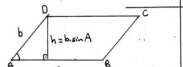
PARALELKENAR:





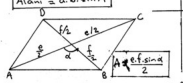
Eğer bir dikdörtgende açıların 90° olması koşulunu kaldırırsak paralelkenar elde edilir.
Alanı = a.h₁

Alanı = 6.4 = 24 cm²
Alanı = b.h₂ = 8.3 = 24 cm²



b = 6 cm
m(A) = 30°
a = 10 cm
} ise Alan = ?

Alanı = 10 . 6 . sin30 = 30 cm²



AC = 16 cm
BD = 12 cm
m(BÂC) = 150° = $\frac{5\pi}{6}$ radyan
} A = ?

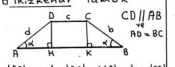
Alan = $\frac{16.12}{2}$. sin150 = 48 cm² 'dir.

K.T.

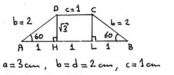
2

YAMUK

o İkizkenar Yamuk



CD // AB
AD = BC



AB // CD ve |AD| = |BC| = 2cm

|AB| = a, b = |BC| = |AD| = d, c = |CD|

a = 3cm, b = d = 2 cm, c = 1 cm

* |AC| = |BD| → Köşegenleri eşittir.

|AC| = |BD| = $\sqrt{7}$ cm

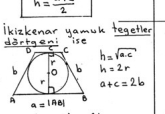
* |AH| = |KB| = $\frac{a-c}{2}$

|AH| = |LB| = $\frac{a-c}{2}$ = $\frac{3-1}{2}$ = 1 cm

* Köşegenleri dikse
  $h = \frac{a+c}{2}$

* AC ⊥ BD, a = 3√2, c = √2, h = ?
  $h = \frac{a+c}{2} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm

* İkizkenar yamuk teğetler dörtgeni ise



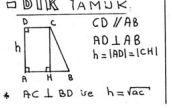
h = √ac
h = 2r
a + c = 2b

a = |AB| = 8 cm, c = |CD| = 2 cm
b = |AD| = |BC| = ? , h = ? cm
h = √ac = √8.2 = 4 cm
8 + 2 = 2b → b = 5 cm
h = 2r = 4 → r = 2 cm

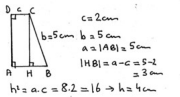
Alan(ABCD) = 2br

Alan(ABCD) = 2.5.2 = 20 cm²

□ DİK YAMUK



CD // AB
AD ⊥ AB
h = |AD| = |CH|



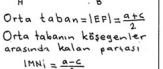
c = 2cm
b = 5cm
b = 5 cm
a = |AB| = 5 cm
|HB| = a − c = 5 − 2 = 3 cm

* AC ⊥ BD ise h = √ac

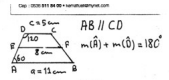
h² = a.c = 8.2 = 16 → h = 4 cm

3

□ YAMUK



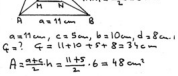
AB // CD



AB // CD
m(Â) + m(D̂) = 180°

* Orta taban = |EP| = $\frac{a+c}{2}$
* Orta tabanın köşegenler arasında kalan parçası |MN| = $\frac{a-c}{2}$

|EP| = $\frac{a+c}{2}$ = $\frac{11+5}{2}$ = 8 cm



|MN| = $\frac{11-5}{2}$ = 3 cm

* Çevre = Ç = a + b + c + d

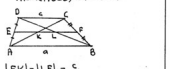
a = 11 cm, c = 5 cm, b = 10 cm, d = 8 cm
Ç = ? Ç = 11 + 10 + 5 + 8 = 34 cm

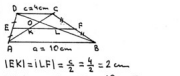
* Alan(ABCD) = $\frac{a+c}{2}$. h

A = $\frac{a+c}{2}$ h = $\frac{11+5}{2}$. 6 = 48 cm²

Alan(ABCD) = |EP| . h

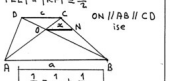
A = |EP| . h = 8 . h = 8 . 6 = 48 cm²





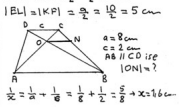
|EK| = |LF| = $\frac{c}{2}$
|EL| = |KP| = $\frac{a}{2}$

|EK| = |LF| = $\frac{c}{2}$ = $\frac{4}{2}$ = 2 cm
|EL| = |KP| = $\frac{a}{2}$ = $\frac{10}{2}$ = 5 cm



ON // AB // CD ise

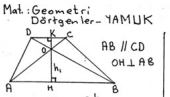
$\frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$



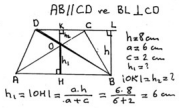
a = 8 cm
c = 2 cm
AB // CD ise
|ON| = ?

$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ → x = 1,6 cm

Mat: Geometri
Dörtgenler- YAMUK



AB // CD
OH ⊥ AB



AB // CD ve BL ⊥ CD

$h_1 = |OH| = \frac{a.h}{a+c}$

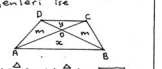
$h_2 = |OK| = \frac{c.h}{a+c}$

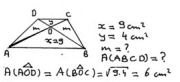
h = 8 cm
a = 6 cm
c = 2 cm
h₁ = ?
|OK| = h₂ = 2

$h_1 = |OH| = \frac{a.h}{a+c} = \frac{6.8}{6+2} = 6$ cm

$h_2 = |OK| = \frac{c.h}{a+c} = \frac{2.8}{6+2} = 2$ cm

* [AC] ve [BD] yamuğun köşegenleri ise





x = 9 cm²
y = 4 cm²
m = ?
A(ABCD) = ?

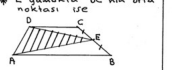
* A(AÔD) = A(BÔC) = $\sqrt{x.y}$

A(AÔD) = A(BÔC) = $\sqrt{9.4}$ = 6 cm²

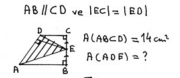
A(ABCD) = $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

A(ABCD) = $(\sqrt{9} + \sqrt{4})^2$ = 25 cm²

* E yamukta BC'nin orta noktası ise



AB // CD ve |BC| = |EO|

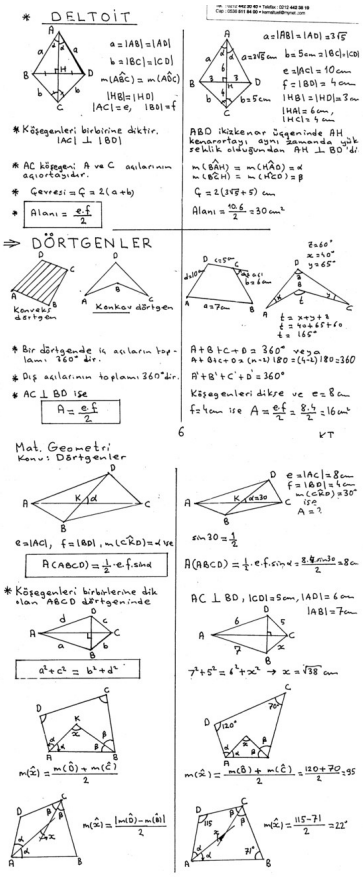


A(ABCD) = 14 cm²
A(ADF) = ?

$A(\hat{AED}) = \frac{A(\hat{ABCD})}{2}$

$A(\hat{AED}) = \frac{A(\hat{ABCD})}{2} = \frac{14}{2}$

A(AÊD) = 7 cm² 'dir.



* DELTOİT

a = |AB| = |AD|
b = |BC| = |CD|
m(ABC) = m(ADC)
|HB| = |HD|
|AC| = e, |BD| = f

* Köşegenleri birbirine diktir. |AC| ⊥ |BD|

* AC köşegeni A ve C açılarının açıortayıdır.

* Çevresi = Ç = 2(a+b)

* Alanı = $\frac{e \cdot f}{2}$

a = |AB| = |AD| = $2\sqrt{5}$
b = 5cm = |BC| = |CD|
e = |AC| = 10cm
f = |BD| = 4cm
|HB| = |HD| = 3cm
|HA| = 6cm
|HC| = 4cm

ABD ikizkenar üçgeninde AH kenarortayı aynı zamanda yükseklik olduğundan AH ⊥ BD'dir

m(BÂH) = m(HÂD) = α
m(BĈH) = m(HĈD) = β

Ç = 2(3$\sqrt{5}$ + 5) cm

Alanı = $\frac{10 \cdot 6}{2}$ = 30 cm²

⇒ DÖRTGENLER

Konveks dörtgen

Konkav dörtgen

* Bir dörtgende iç açıların toplamı 360° dir.

A + B + C + D = 360° veya
A + B + C + a = (n-1)180 = (4-1)180 = 360

* Dış açılarının toplamı 360°dir.

A' + B' + C' + D' = 360°

* AC ⊥ BD ise

A = $\frac{e \cdot f}{2}$

Köşegenleri dikey ve e = 8cm
f = 4cm ise A = $\frac{e \cdot f}{2}$ = $\frac{8 \cdot 4}{2}$ = 16cm²

6 KT

Mat. Geometri
Konu: Dörtgenler

e = |AC|, f = |BD|, m(CKD) = α ve

A(ABCD) = $\frac{1}{2}$ · e · f · sinα

* Köşegenleri birbirlerine dik olan ABCD dörtgeninde

$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

m(x̂) = $\frac{m(\hat{O}) + m(\hat{C})}{2}$

m(x̂) = $\frac{|m(\hat{O}) - m(\hat{B})|}{2}$

e = 8cm
f = 4cm
m(CKD) = 30° ise
A = ?

sin30 = $\frac{1}{2}$

A(ABCD) = $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sin 30 = \frac{8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{2}$ = 8cm²

AC ⊥ BD, |CD| = 5cm, |AD| = 6cm
|AB| = 7cm

$7^2 + 5^2 = 6^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{38}$ cm

m(x̂) = $\frac{m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{2} = \frac{120 + 70}{2} = 95$

m(x̂) = $\frac{115 - 71}{2} = 22°$

- 7 -

* Bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarının birleştirilmesi ile oluşan dörtgen paralelkenardır.

MN // AC
KL // AC
ve
|KL| = |MN| = $\frac{|AC|}{2}$ dir.

* KN // ML // BD ve |NK| = |ML| = $\frac{|BD|}{2}$

* Çevre(KLMN) = |AC| + |BD|

* Özel durumlar:
→ |AC| = |BD| ise KLMN eşkenar dörtgen olur.

AC ⊥ BD ise KLMN dikdörtgendir.

* Bir dörtgenin, karşılıklı iki kenarının orta noktaları ile köşegenlerinin orta noktalarının birleştirilmesi ile oluşan dörtgen paralelkenardır.

ACD üçgeninde, KN // CD dir.
DBC " LM // CD dir.
Şekildeki,
ABD üçgeninde KL // AB
ACB " NM // AB dir.

* Çevre(KLMN) = |AB| + |CD|

|AC| = 18cm , |BD| = 12cm

|KL| = |MN| = $\frac{|AC|}{2} = \frac{18}{2}$ = 9 cm

|NK| = |ML| = $\frac{|BD|}{2} = \frac{12}{2}$ = 6 cm

Çevre = 18 + 12 = 30 cm

|AC| = |BD| = 10cm ise KLMN kenarları 5cm olan eşkenar dörtgendir.
MN ⊥ NK olacağından KLMN dikdörtgendir.

|CD| = 16cm
NC = NA
LB = LD
KA = KD
MB = MC

|AB| = 12cm

|KL| = |NM| = $\frac{|AB|}{2} = \frac{12}{2}$ = 6 cm
|KN| = |LM| = $\frac{|CD|}{2} = \frac{16}{2}$ = 8 cm

Çevre (KLMN) = 12 + 16 = 28 cm

- 8 - K.T.

Mat. : Geometri
Düzgün BEŞGEN

* n = 5 kenarlı düzgün çokgenin α iç açısı

nα = (n-2)180 = 5α

* β dış açısı ise n = 5 için

nβ = 360

* Köşegen sayısı = $\frac{n(n-3)}{2}$

* Düzgün beşgenin köşeleri |OA| = R yarıçaplı çember üzerindedir.

* Düzgün beşgenin kenarları r = |OH| yarıçaplı çembere teğettirler.

* Alanı = $\frac{n \cdot a}{2} \cdot \frac{r}{2} = \frac{5ra}{2} = 1,72a^2$
Alan ≃ $\frac{25}{4} r^2$

* Alanı = $\frac{n \cdot R^2 \cdot \sin 72°}{2}$ n = 5 için

* Çevresi = na = 5a

a = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA|

θ = $\frac{360}{n} = \frac{360}{5} = \frac{72°}{} = m(\hat{AOB})$

a = 5cm

5α = (5-2)·180 → α = 108° = $3\frac{\pi}{5}$ radyan

5β = 360 → β = 72° = $2\frac{\pi}{5}$ radyan

n = 5 için Köşegen sayısı = $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

sin72° = 0,951
|OA| = R
|OH| = r

R = 12,36 cm
r = 10 cm
a = 14,54 cm

Alanı = $\frac{5 \cdot 10 \cdot 14,54}{2}$ = 363,5 cm²

Alanı = $\frac{5 \cdot (12,36)^2 \cdot \sin 72°}{2}$ = 363,5 cm²

Çevresi = 5 · 14,54 = 72,7 cm

D - 9 -



DÜZGÜN ALTIGEN

Altı kenarı ve iç açıları eş olan dışbükey çokgene düzgün altıgen denir.

n=6 kenarlı düzgün çokgenin dış açısı

$n\alpha = (n-2).180$

Düzgün altıgenin β dış açısı

$n\beta = 360$

Köşegen sayısı $= \frac{n(n-3)}{2}$

Düzgün altıgenin köşeleri |OA| = R = a yarıçaplı çember üzerindedir.

İç teget çemberinin yarıçapı r dir. $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Alanı $= \frac{n.a.r}{2} = 3ar = \frac{2\sqrt{3}}{2}a^2$

Alanı $= \frac{nR^2 \sin\alpha}{2} = 3R^2 \sin\alpha$

Çevresi $= na = 6a$

$a = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF|$

$|OA| = R = a$

$|AB| = 6\,cm$

$6\alpha = (6-2)180 \rightarrow \alpha = 120° = 2\frac{\pi}{3}$ radyan

$6\beta = 360 \rightarrow \beta = 60° = \frac{\pi}{3}$ radyan

Köşegen sayısı $= \frac{6(6-3)}{2} = 9$

R = a = 6 cm = |OA| = |AB|

Çevrel çemberin yarıçapıdır.

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm

r; APOTEM doğrusudur.

Alanı $= 3.6.3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}\,cm^2$

Alanı $= 3.6\frac{\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}\,cm^2$

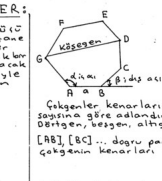
Çevresi $= 6.6 = 36\,cm$

Mat.: Geometri

ÇOKGENLER:

Düzlemde, herhangi üçü doğrusal olmayan n tane (3≤n) noktanın ikişer ikişer ardışık olarak birer kapalı bölge oluşturacak şekilde birleştirilmesiyle oluşan şekle çokgen denir.

3≤n



Çokgenler kenarlarının sayısına göre adlandırılırlar. Dörtgen, beşgen, altıgen gibi.

[AB], [BC] ... doğru parçalarına çokgenin kenarları denir.

* Dışbükey çokgenlerde iç açıların toplamı

$\sum_{i=1}^{n} x_i = (n-2)180 = (n-2).\pi$ Radyan

n=11 kenarlı bir çokgenin iç açılarının toplamı

$\sum_{i=1}^{11} x_i = (11-2)180 = 1620° = 3\pi$ radyan

* n kenarlı konveks bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 360° = 2\pi$ Radyan

n=11 kenarlı bir çokgenin dış açılarının toplamı kenar sayısına bağlı değildir.

$\sum_{i=1}^{11} \beta_i = 360°$

* Aynı köşeye ait bir iç açı ile bir dış açı birbirinin bütünleridir.

$\alpha_1 + \beta_1 = 180°$

$\alpha_1 + \beta_1 = 180°$

* Bütün köşegenlerinin sayısı

$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

n=11 için onbirgenin köşegen sayısı $= \frac{11(11-3)}{2} = \frac{11.8}{2} = 44$

* İç açılarının en az n-3 tanesi geniş açıdır. (Kare, dikdörtgen hariç)

n=11 ise

n-3 = 11-3 = 8 iç açısı en az geniş açıdır.

11

n kenarlı bir konveks çokgenin belirlenebilmesi (çizilebilmesi) için en az 2n-3 tane bağımsız elemanının bilinmesi gerekir.

Bu 2n-3 elemanın en az n-2 tanesi uzunluk ve en çok n-2 tanesi açı olmalıdır.

2n-3 = (n-2) + (n-1)

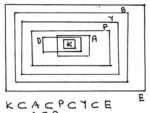
* Bir köşesinden geçen köşegen sayısı n-3 tanedir.

Örneğin n=5 kenarlı bir konveks çokgenin çizilebilmesi için en az 2n-3 = 2.5-3 = 7 bağımsız elemanının bilinmesi gerekir. Bu 7 elemanın en az n-2 = 5-2 = 3 tanesi uzunluk olmalıdır. Bu durumda en çok 7-3=4 tanesi açı olabilir.

7 = 4(uzunluk) + 3(açı)

n=5 kenarlı bir çokgenin bir köşesinden geçen köşegen sayısı n-3 = 5-3 = 2 tanedir.

Venn şeması ile çokgenler ve dörtgenlerden oluşan kümeler arasındaki ilişkiyi şöyle açıklayabiliriz.



K: Kareler kümesi;
A: Eşkenar dörtgenler kümesi;
D: Dikdörtgenler kümesi;
P: Paralelkenarlar kümesi;
Y: Yamuk kümesi;
B\Y: Deltoid veya genel dörtgenler
B: Dörtgenler kümesi;
E-B = B' ; Çokgenler kümesi;
E: Çokgenler kümesi

KCACPCYCE
ACP
KCD

Öğretmen KEMAL Türkeli

